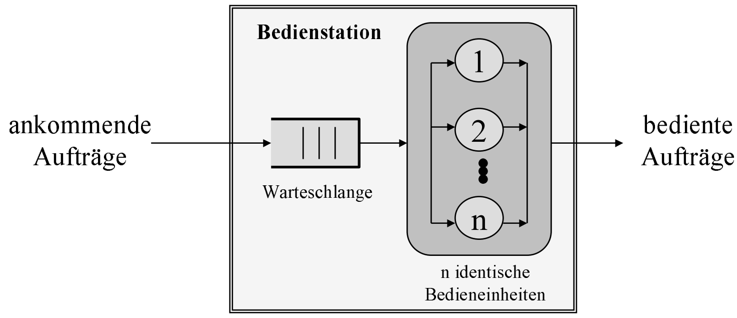
Warteschlangennetze

Elementares Wartesystem



Grundeinheit eines Warteschlangennetzes

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 1

Wichtige Begriffe

- single server: Bedienstation mit nur einer Bedieneinheit
- multiple server: Bedienstation mit mehreren Bedieneinheiten
- infinite server: Bedienstation mit "unendlich vielen" Bedieneinheiten
- Warteschlangendisziplin (Bedienstrategie): legt fest, welcher Auftrag aus der Warteschlange als nächster zur Bedienung ansteht

  Beispiele:
  - FCFS: First-Come-First-Served
  - LCFS: Last-Come-First-Served
  - SIRO: Service-In-Random-Order
  - RR: Round Robin
  - PS: Processor Sharing
  - Prioritätsstrategien

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 2

- **Round Robin (RR):**

  Ist die Bedienung eines Auftrags nach einer fest vorgegebenen Zeitscheibe noch nicht beendet, so wird der Auftrag verdrängt und wieder in die Warteschlange eingereiht, die nach FCFS abgearbeitet wird. Dies wiederholt sich so oft, bis der Auftrag vollständig bedient ist.

- **Processor Sharing:**

  Entspricht Round Robin mit infinitesimal kleiner Zeitscheibe. Dadurch entsteht der Eindruck, als ob alle Aufträge gleichzeitig bedient würden mit entsprechend längerer Bedienzeit.

- **Prioritätsstrategien:**
  - *Statische Prioritäten:* Die Auswahl erfolgt nach fest vorgegebenen Prioritäten der Aufträge. Innerhalb einer Prioritätsklasse (mit gleichen Prioritäten) erfolgt die Auswahl nach FCFS.
  - *Dynamische Prioritäten:* Die Auswahl erfolgt nach dynamischen Prioritäten, die sich in Abhängigkeit von der Zeit ändern.
- **Verdrängung:**

  Bei den Prioritätsdisziplinen und LCFS kann auch Unterbrechung und Verdrängung eines gerade in Bedienung befindlichen Auftrags erfolgen, so z.B. wenn ein Auftrag in der Warteschlange höhere Priorität erhält.

Weitere Charakteristika von elementaren Wartesystemen

- Zwischenankunftszeit t_a:
  Zeit zwischen aufeinanderfolgend ankommenden Aufträgen
- Bedienzeit t_b:
  Zeit für die Bedienung einzelner Aufträge

- Der Zugang der Aufträge sowie deren Abfertigung erfolgt in der Regel **zufällig**.
- Zwischenankunftszeit und Bedienzeit sind **Zufallsgrößen** und durch die dazugehörigen Verteilungsfunktionen eindeutig festgelegt.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 5

Weitere Charakteristika von elementaren Wartesystemen

- **Ankunftsrate:**
  Mittlere Anzahl von Aufträgen, die pro Zeiteinheit eintreffen:

$$\lambda = \frac{1}{\bar{t}_a}$$

- **Bedienrate:**
  Mittlere Anzahl von Aufträgen, die pro Zeiteinheit bedient werden:

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_b}$$

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 6

Kendall'sche Notation:

Kurzschreibweise zur einheitlichen Beschreibung elementarer Wartesysteme

A/B/m - Warteschlangendisziplin

A: Verteilung der Zwischenankunftszeiten

B: Verteilung der Bedienzeiten des Wartesystems

m: Anzahl identischer Bedieneinheiten ($m \geq 1$)

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 7

Für A und B werden traditionell die folgenden Symbole verwendet:

M: Exponentialverteilung (Markov-Eigenschaft)

E_K: Erlang-Verteilung mit k Phasen

H_K: Hyperexponentialverteilung mit k Phasen

C_K: Cox-Verteilung mit k Phasen

D: Deterministische Verteilung, d.h. die Zwischenankunfts- bzw. Bedienzeiten sind konstant

G: Allgemeine (generelle) Verteilung

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 8

Leistungskenngrößen

- Das Ziel bei der Modellierung mit Warteschlangen ist die Ermittlung von **Leistungskenngrößen**.

- Warteschlangenmodelle sind dynamische Systeme, das heißt die Leistungskenngrößen sind zeitabhängig.
- In der Regel interessiert man sich jedoch nur für die Ergebnisse im stationären Zustand (sämtliche Einschwingvorgänge sind abgeklungen und die Leistungskenngrößen zeitunabhängig).

Wichtige Leistungskenngrößen

- **Zustandswahrscheinlichkeit p(k):**
  Das Systemverhalten eines Wartesystems kann in vielen Fällen mit den Zustandswahrscheinlichkeiten p(k) ausreichend beschrieben werden.
- Daraus lassen sich die Mittelwerte aller anderen Leistungskenngrößen ableiten.
  Es gilt:
  p(k) = P[es befinden sich k Aufträge im Wartesystem]

- **Auslastung ρ:**

– Bei Wartesystemen mit einer Bedieneinheit (single server) gibt die Auslastung ρ den Bruchteil der Gesamtzeit an, den die Bedieneinheit aktiv (belegt) ist. Sie berechnet sich zu:

$$\rho = \frac{\text{mittlere Bedienzeit}}{\text{mittlere Zwischenankunftszeit}} = \frac{\text{Ankunftsrate}}{\text{Bedienrate}} = \frac{\lambda}{\mu}$$

– Bei mehreren Bedieneinheiten (multiple server) gibt die Auslastung den mittleren Anteil der aktiven Bedieneinheiten an. Da $m \cdot \mu$ die Gesamtbedien-rate ist, gilt:

$$\rho = \frac{\lambda}{m \cdot \mu}$$

Mit Hilfe von ρ kann die Gleichgewichtsbedingung formuliert werden. Für ein stabiles System (Gleichgewichtszustand) muß nämlich die Bedingung

$$\rho < 1$$

erfüllt sein, daß heißt es dürfen pro Zeiteinheit im Mittel nicht mehr Aufträge ankommen als bedient werden können. Die folgenden Betrachtungen gelten nur für stabile Systeme.

- **Durchsatz λ:**
  - Der Durchsatz eines elementaren Wartesystems ist definiert als die mittlere Anzahl von Aufträgen, die pro Zeiteinheit fertig bedient werden (Abgangsrate).
  - Da im statistischen Gleichgewicht die Abgangsrate eines Wartesystems gleich der Ankunftsrate λ dieses Wartesystems ist, berechnet sich der Durchsatz wie folgt: $\lambda = m \cdot \rho \cdot \mu$

- **Antwortzeit t:**
  Als Antwortzeit (Verweilzeit) bezeichnet man die Gesamtheit der Zeit, die ein Auftrag im Wartesystem verbringt.
- **Wartezeit ω:**
  Zeit, die ein Auftrag in der Warteschlange warten muß, bis seine Bearbeitung beginnt. Es gilt:

  Antwortzeit = Wartezeit + Bedienzeit

  Da ω und t meistens als Zufallsgrößen gegeben sind, wird ihr Mittelwert berechnet, so daß:

$$\bar{t} = \bar{\omega} + \frac{1}{\mu}$$

Häufig werden auch die Verteilungsfunktionen der Warte- und der Antwortzeit $F_\omega(x)$ bzw. $F_t(x)$ benötigt.

- **Warteschlangenlänge Q:**
  Anzahl der Aufträge in der Warteschlange
- **Füllung k:**
  Anzahl der Aufträge im Wartesystem. Es gilt: $\bar{k} = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p(k)$

  Der Mittelwert $\bar{k}$ der Anzahl der Aufträge läßt sich ebenso wie die mittlere Warteschlangenlänge $\bar{Q}$ über eines der wichtigsten Gesetze der Warteschlangentheorie berechnen :

<u>Das Gesetz von Little:</u>

$$\boxed{\bar{k} = \lambda \cdot \bar{t} \text{ bzw. } \bar{Q} = \lambda \cdot \bar{\omega}}$$

Littles Gesetz gilt für alle Warteschlangendisziplinen und beliebige G/G/m-Systeme.

Warteschlangennetze

- Man spricht von einem Warteschlangennetz, wenn mindestens zwei Bedienstationen miteinander verbunden sind.
- Warteschlangennetze entstehen durch die Verknüpfung der Ein- und Ausgänge mehrerer Bedienstationen.
- Der aktuelle Zustand eines Warteschlangennetzes ergibt sich durch die Zusammenfassung der Zustände der zugehörigen Bedienstationen zu einem Netzzustandsvektor.

Warteschlangennetze

- **Offenes Warteschlangennetz:**

  Aufträge können von außerhalb des Netzes ankommen und das Netz auch wieder verlassen.

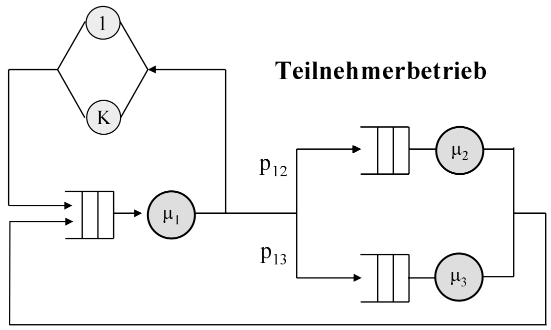
- **Geschlossenes Warteschlangennetz:**

  Externe Auftragsankünfte und -abgänge sind nicht möglich.

  - Die Anzahl der Aufträge im geschlossenen Netz ist stets konstant.

Warteschlangennetze

Beispiel für ein geschlossenes Warteschlangennetz

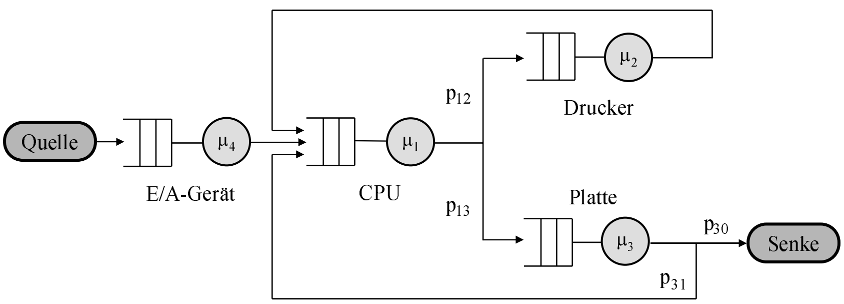


k: Anzahl von Aufträgen im Netz

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 17

Warteschlangennetze

Beispiel für ein offenes Warteschlangennetz



Offenes Warteschlangenmodell eines Rechensystems

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 18

Formale Beschreibung von Warteschlangennetzen

N	gibt die Anzahl der Knoten (Bedienstationen) des Netzes an
K	bezeichnet bei geschlossenen Netzen die konstante Anzahl der Aufträge im Netz
$(k_1,k_2,...,k_N)$	ist der Zustand des Warteschlangennetzes, wobei
k_i	die Anzahl der Aufträge im i-ten Knoten angibt; für geschlossene Netze gilt: $\sum_{i=1}^{N} k_i = K$
m_i	ist die Anzahl der parallelen Bedieneinheiten des i-ten Knotens ($m_i \geq 1$)
μ_i	ist die mittlere Bedienrate von Aufträgen im Knoten i
$1/\mu_i$	ist die mittlere Bedienzeit eines Auftrags im Knoten i

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 19

Formale Beschreibung von Warteschlangennetzen

p_{ij}	ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein in Knoten i fertig bedienter Auftrag zum Knoten j überwechselt. Bei offenen Netzen repräsentiert Knoten 0 die Außenwelt. Dementsprechend bezeichnet
p_{0j}	die Wahrscheinlichkeit, daß ein von außen kommender Auftrag zuerst den Knoten j betritt und
$p_{i0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} p_{ij}$	ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag nach Abfertigung durch Knoten i das Netz anschließend verläßt
λ_{0i}	mittlere Ankunftsrate von außen beim i-ten Knoten
λ_i	gesamte mittlere Ankunftsrate von Aufträgen bei Knoten i

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 20

Folgende zusätzliche Beziehungen werden noch bei der Betrachtung von Warteschlangennetzen benötigt, die mehrere Auftragsklassen beinhalten:

R Anzahl der Auftragsklassen im Mehrklassennetz

k_{ir} Anzahl der Klasse-r Aufträge im i-ten Knoten, wobei für geschlossene Netze gilt:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{r=1}^{R} k_{ir} = K$$

K_r ist die (auch in geschlossenen Netzen nicht notwendigerweise konstante) Anzahl von Klasse-r Aufträgen im Netz. Es gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} k_{ir} = K_r$$

$\underline{K}=(K_1,\ldots,K_R)$ Anzahl der Aufträge in den verschiedenen Klassen (Populationsvektor)

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 21

$\underline{S}_i=(k_{i1},\ldots,k_{iR})$ bezeichnet den Zustand des i-ten Knotens mit $\sum_{i=1}^{N} \underline{S}_i = \underline{K}$

$\underline{S}=(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_N)$ beschreibt den Gesamtzustand des Mehrklassennetzes

μ_{ir} mittlere Bedienrate von Aufträgen der Klasse r beim Knoten i

$p_{ir,js}$ ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag der Klasse r nach Bedienung im Knoten i dann in Klasse s und zu Knoten j überwechselt. Im Falle offener Netze bezeichnet somit

$p_{0,js}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag von außerhalb des Netzes zum Knoten j in Klasse s gelangt, und

$p_{ir,0}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Auftrag der Klasse r nach Beendigung der Bedienung durch Knoten i das Netz verläßt:

$$p_{ir,0} = 1 - \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{R} p_{ir,js}$$

λ_{ir} mittlere Ankunftsrate von Aufträgen der Klasse r beim Knoten i; es gilt:

$$\lambda_i = \sum_{r=1}^{R} \lambda_{ir}$$

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 22

Leistungskenngrößen von Warteschlangennetzen

Die Zustandswahrscheinlichkeit eines Netzes wird mit $p(k_1,\ldots,k_N)$ bezeichnet (bzw. mit $p(\underline{S}_1,\ldots,\underline{S}_N)$ im Falle von Mehrklassennetzen).

Es gilt stets die Normalisierungsbedingung, daß die Summe der Wahrschein - lichkeiten aller möglichen Zustände $(k_1,\ldots,k_N)$, die die Bedingung $\sum_{j=1}^{N} k_j = K$ erfüllen, gleich Eins sein muß $(0 \le k_i \le K)$:

$$\sum_{\sum_{j=1}^{N} k_j = K} p(k_1,\ldots,k_N) = 1$$

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 23

- Die Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten $p(k_1,\ldots,k_N)$ aller möglichen Systemzustände im Gleichgewicht kann als das Hauptproblem der analytischen Modellbildung angesehen werden.
- Aus diesen Wahrscheinlichkeiten lassen sich die Mittelwerte aller anderen wichtigen Leistungsgrößen des Netzes ableiten.
- Manche Verfahren liefern aber auch direkt die anderen Leistungsgrößen unter Umgehung der Zustandswahrschein-lichkeiten und sind dann entsprechend einfacher.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 24

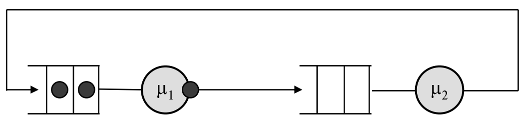
Aus den Zustandswahrscheinlichkeiten $p(k_1,...,k_N)$ werden die Randwahrscheinlichkeiten $p_i(k)$, daß sich im i-ten Knoten genau k_i=k Aufträge befinden, wie folgt berechnet:

$$p_i(k) = \sum_{\substack{\sum_{j=1}^{N} k_j = K \\ \& \, k_i = k}} p(k_1,...,k_N)$$

Man erhält $p_i(k)$ somit als die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Zustände $(k_1,...,k_N)$, $0 \leq k_i \leq K$, welche die Bedingung $\sum_{j=1}^{N} k_j = K$ erfüllen, wobei nur im i - ten Knoten eine konstante Anzahl von Aufträgen, nämlich k, festgelegt wird.

Für die Berechnung in Mehrklassennetzen siehe [Bolch 89].

Beispiel:

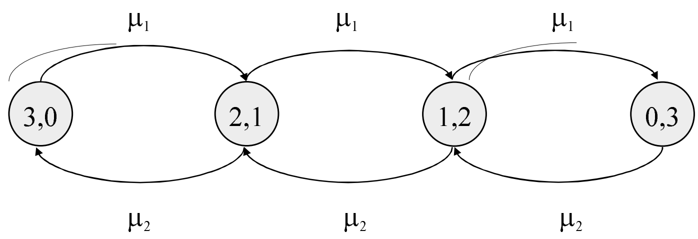


geschlossenes Warteschlangennetz

- Anzahl der Bedienstationen: N = 2
- Anzahl der Aufträge: K = 3
- Mittlere Bedienrate von Aufträgen in Bedienstation 1: μ_1 = 0,2/sec
- Mittlere Bedienrate von Aufträgen in Bedienstation 2: μ_2 = 0,4/sec
- Warteschlangendisziplin bei beiden Knoten: FCFS

Mögliche Netzzustände (k_1,k_2):

Zustandsraum R = {(3,0),(2,1),(1,2),(0,3)}



- **Ziel:**

  Bestimmung der Zustandswahrscheinlichkeiten

  p(3,0), p(2,1), p(1,2), p(0,3)

  im stationären Zustand (statistisches Gleichgewicht).

- **Methoden:**
  - analytisch (Markov-Prozesse)
  - simulativ (Nachspielen der dynamischen Abläufe auf einem Rechner)

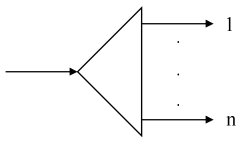
Erweiterte Warteschlangennetze

- Ein spezielles Problem beim Umgang mit konventionellen Warteschlangenmodellen besteht darin, daß ein Auftrag immer nur eine einzige Bedienstation im Modell zur gleichen Zeit belegen kann.
- Bei der Modellierung von Rechensystemen muß jedoch manchmal auch der Fall berücksichtigt werden, daß ein Job zwei oder mehr Betriebsmittel gleichzeitig benutzt.
- So benötigt ein Computerprogramm beispielsweise zuerst Speicherplatz, bevor es die Dienste des Prozessors in Anspruch nehmen kann, d.h. Speicher und CPU müssen gleichzeitig belegt werden.

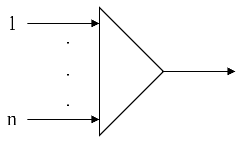
- Um den hieraus resultierenden Effekt auf die Leistungsgrößen berücksichtigen zu können, wurden die sogenannten erweiterten Warteschlangenmodelle eingeführt.
- Diese Modelle enthalten neben Bedienstationen (aktive Knoten) noch sogenannte passive Knoten.

- **Verzweigungs- und Vereinigungsknoten:**
  - Ein Verzweigungsknoten (Fission-Knoten) dient dazu, einen ankommenden Auftrag (den Hauptauftrag) in n parallel zueinander ablaufende, vom Hauptauftrag abhängende Unteraufträge zu verzweigen.

- Zwischen Hauptauftrag und Unteraufträgen besteht eine Vater/Sohn-Beziehung.
- Der Hauptauftrag wird erst wieder fortgesetzt, falls alle n Unteraufträge sich im zugehörigen Vereinigungsknoten (Fussion-Knoten) gesammelt haben.
- Verzweigungs- und Vereinigungsknoten dienen hauptsächlich der Modellierung von interner Parallelität und kommen nur paarweise vor, manchmal auch ineinander geschachtelt.
- Varianten bestehen darin, daß der Hautauftrag den Vereinigungsknoten verlassen kann, nachdem n Unteraufträge angekommen sind, unabhängig davon, von welchem Hauptauftrag diese n Unteraufträge abstammen.

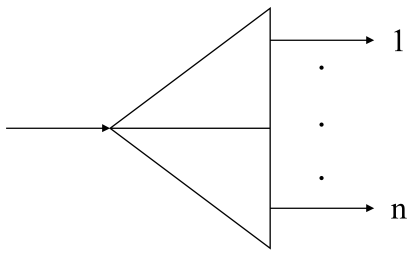


Verzweigungsknoten

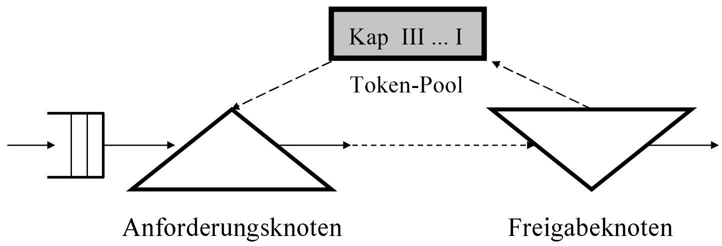


Vereinigungsknoten

- **<u>Aufspaltungsknoten:</u>**
  - Im Gegensatz zum Verzweigungsknoten dient der Aufspaltungsknoten (Split-Knoten) dazu, einen Auftrag in bis zu n voneinander unabhängige Aufträge aufzuspalten.
  - Die n-1 neuen Aufträge erhalten die gleichen Auftragscharakteristika wie der Ursprungsauftrag, sind im dynamischen Verhalten von diesem später aber nicht mehr unterscheidbar.



- **Anforderungs- und Freigabeknoten:**
  - Ein Anforderungsknoten (Allocate-Knoten) dient dazu, dem ankommenden Auftrag aus einer Anzahl "Kap" von Betriebsmitteln, üblicherweise aus einem Vorrat bzw. Pool von Marken bzw. Token, eine bestimmte Anzahl (meist ein Exemplar) zu beschaffen.
  - Falls die aktuelle Kapazität erschöpft ist, muß in einer Warteschlange gewartet werden.
  - Die Betriebsmittel werden im zugehörigen Freigabeknoten (Release-Knoten) wieder in den gemeinsamen Pool zurückgegeben. Anforderungs- und Freigabeknoten kommen nur paarweise vor und können z.B. zur Modellierung von hierarchischen Betriebsmittelstrukturen verwendet werden.



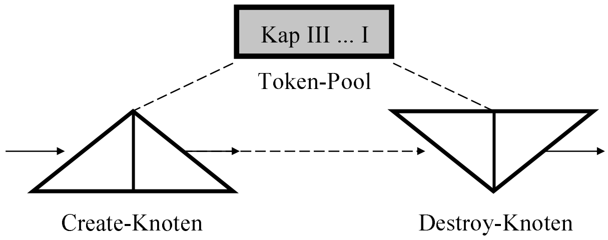
- Weitere denkbare Anwendungen sind die Verwaltung von Puffern oder der gegenseitige Ausschluß (eine Anzahl Kap=1 von Token würde der Wirkungsweise eines Semaphors entsprechen).

- **Create-Knoten:**

  Ein ankommender Auftrag erzeugt eine bestimmte Anzahl von Marken und gibt sie in den Markenpool.

- **Destroy-Knoten:**

  Ein ankommender Auftrag zerstört alle Marken des zugehörigen Pools, die er gerade besitzt.

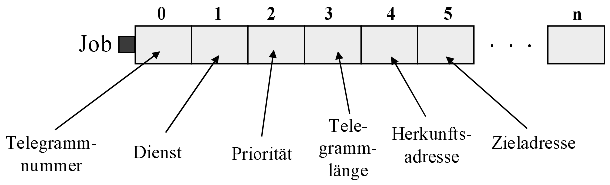


- **Quellen und Senken:**
  - Quellen und Senken stellen spezielle Knoten zur Erzeugung und Vernichtung von Aufträgen dar.
  - Für eine Quelle wird üblicherweise die Rate angegeben, mit der die Aufträge erzeugt werden.
  - Jeder Auftragsklasse ist höchstens eine Quelle zugeordnet.

- **Jobvariable:**
  - Array von Variablen, das fest an einen Auftrag (Job) gebunden ist.
  - Jedem Auftrag ist genau ein solches Array mit definierbarer Länge zugeordnet.

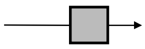
Bsp.:

Kommunikationsauftrag



Jobvariable

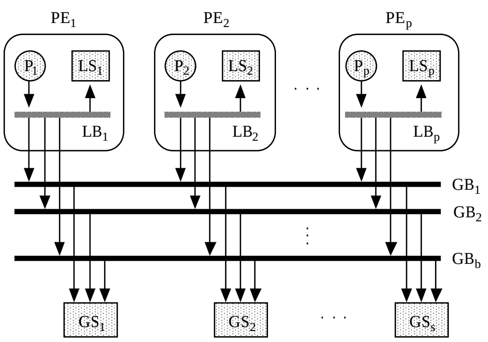
- **Set Node:**



  - Set Nodes sind Knoten, an denen der Jobvariablen Werte zugewiesen werden können.
  - Sobald ein Job einen Set Node passiert, werden diese Zuweisungen durchgeführt, wobei der Job keine Verzögerung erfährt.

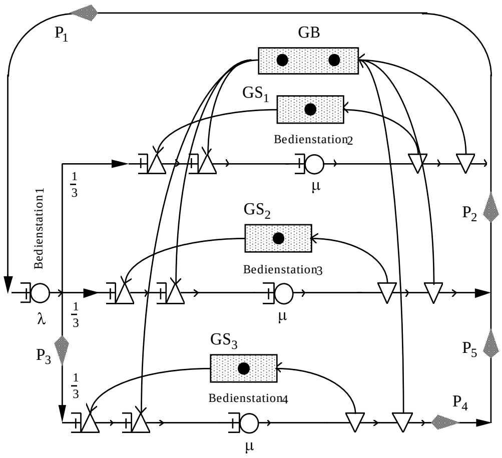
- Erweiterte Warteschlangennetze können im allgemeinen nicht mehr durch analytische Methoden ausgewertet werden.
- Zur Ermittlung von Leistungskenngrößen muß hier auf die Simulation zurückgegriffen werden.
- Auf Warteschlangennetzen basierende Simulationswerkzeuge sind z.B.:
  - **RESQ 2**
  - **QNAP 2**

Fallstudie: Speichergekoppeltes Multiprozessorsystem mit Mehrfachbus



siehe auch http://goethe.ira.uka.de/people/syrjakow/mod_vorlesung/seiten/modvorl.html

Erweitertes Warteschlangenmodell des speicher-gekoppelten Multiprozessorsystems mit Mehrfachbus



- **Literatur:**

Gunther Bolch:
Leistungsbewertung von Rechensystemen,
B.G. Teubner Verlag, 1989.

M. Haas, W. Zorn:
Methodische Leistungsanalyse von Rechensystemen,
Oldenbourg Verlag, 1995.