Teilprobleme bei der rechnergestützten Simulation

- Die Simulation von Zufall
  - Erzeugung von Zufallszahlen
  - Tests für Zufallszahlengeneratoren
- Planung und Auswertung von Simulationsexperimenten
  - Anfangszustand und Anlaufphase
  - Ergebnisgenauigkeit stochastischer Simulationen
- Modellüberprüfung
  - Verifikation
  - Validation

Die Simulation von Zufall

- Viele reale Phänomene zeichnen sich dadurch aus, daß sie als stochastisch anzusehen sind.
- In analytischen Modellen wird Zufall dadurch erfaßt, daß man in den Kalkülen Verteilungstypen und die entsprechenden Parameter ansetzt.
- In Simulationsmodellen benötigt man Zufallszahlen, um die real vorhandenen Zufälligkeiten (Abstände zwischen Nachrichtenankünften, Bedienungsdauer von Aufträgen) nachzubilden.

Erzeugung von Zufallszahlen

- Zufallszahlen können folgendermaßen erzeugt werden:
  - durch Beobachtung stochastischer physikalischer Vorgänge
    - Wurf eines idealen Würfels
    - Zerfall radioaktiver Substanzen
  - computergestützt durch deterministische Algorithmen
- Ein Verfahren zur Erzeugung von Zufallszahlen wird Zufallszahlengenerator genannt.

Erzeugung von Zufallszahlen

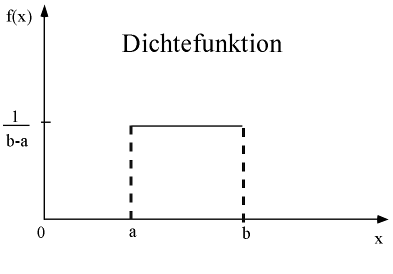
- Zufallszahlentabellen auf Basis von Beobachtung stochastischer physikalischer Vorgänge
  - Vorteil: echte oder natürliche Zufallszahlen
  - Nachteil: riesige Datenmengen, hoher Speicherbedarf
- Erzeugung von Zufallszahlen durch deterministische Algorithmen
  - Vorteil: effiziente Erzeugung nach Bedarf, Reproduzierbarkeit
  - Nachteil: Pseudo-Zufallszahlen, da durch deterministischen Prozeß erzeugt

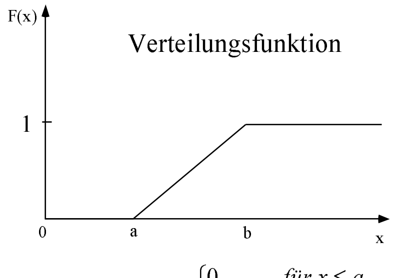
Erzeugung von Zufallszahlen

- Aufgrund ihrer praktischen Vorteile werden heute zur stochastischen Simulation meist Pseudo-Zufallszahlen-generatoren eingesetzt.
- Die Qualität der Simulationsergebnisse hängt dabei wesentlich von der Qualität des verwendeten Pseudo-Zufallszahlengenerators ab.
- Die Güte eines Pseudo-Zufallszahlengenerators kann durch statistische Testverfahren bestimmt werden.

Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

Die Gleichverteilung ist deshalb von besonderer Bedeutung, da sich aus ihr praktisch jede beliebige Verteilung erzeugen läßt.





$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{für } x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a < x < b \\ 1 & \text{für } x \ge b \end{cases}$$

Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

- Erwartungswert E und Varianz Var der Gleichverteilung bestimmen sich aus:

$$E(X)=\int_a^b x \cdot f(x)\, dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, dx = \left[\frac{x^2}{2\cdot(b-a)} \right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

- Als Erwartungswert bezeichnet man allgemein den Mittelwert einer theoretischen Verteilung. Die Varianz (bzw. die Standardabweichung als deren Wurzel) beschreibt die Schwankungen einer Verteilung um deren Mittelwert.

Methoden zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

- Multiplikative lineare Kongruenz-Methode (Lehmer 1951)
- Sie liefert Zufallszahlen nach der rekursiven Rechenvorschrift:

$$y_{i+1} = (A \cdot y_i) \bmod P \qquad i = 0,1,2...$$

- Die Größen A und y_0 stellen festzusetzende ganze Zahlen aus dem Bereich [1, P-1] dar, wobei P eine Primzahl sein sollte.
- Die durch das Verfahren erzielbare Zahlenfolge bewegt sich ebenfalls im Intervall [1, P-1].
- Der exakte Wert 0 läßt sich durch diesen Generator nicht erzeugen (außer für die unbrauchbare Folge 0,0,...).

Methoden zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

- Durch Wahl eines sehr großen Wertes für P (maximal bis zur Rechengenauigkeit des Computers) kann der Wertebereich der Zahlenfolge sehr weit ausgedehnt werden.
- Die erzeugte Zahlenfolge ist periodisch.
- Die maximale Periodenlänge beträgt P-1, falls P eine Primzahl ist.
- Beispiel: Sei A=5 und P=17. Dann ergibt sich für den Startwert y_0=5 die Folge

  8, 6, 13, 14, 2, 10, 16, 12, 9, 11, 4, 3, 15, 7, 1, 5, 8, ...

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 9

Methoden zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

- **Zu beachten:**
  - Zahlen nur innerhalb einer Periode verwenden!
  - Die Periodenlänge kann über die Kombination der Werte y_0, A und P beeinflußt werden, z.B.

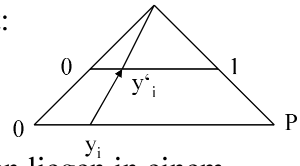
    $P=2^k$, mit ganzzahligem k und k>2 (hierbei kann P-1 die größte im Rechner darstellbare ganze Zahl sein)
  - Es läßt sich nachweisen, daß bei geeigneter Wahl von A und y_0 die maximal erzielbare Periodenlänge P/4 beträgt.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 10

Methoden zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

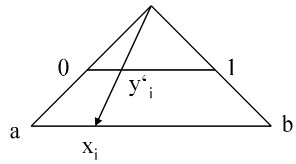
- Die mit Hilfe dieses Verfahrens gebildeten Zahlen y_i werden meist noch durch P dividiert:

$$y'_i = \frac{y_i}{P} \qquad (i = 1,2,3,...)$$



- Die so erzeugten Pseudozufallszahlen liegen in einem Intervall (0,1) und erfüllen gut die Forderung nach Gleichverteilung.
- Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen für ein beliebiges Intervall (a,b):

$$\frac{x_i - a}{b - a} = y'_i \;\Rightarrow x_i = a + (b - a)\cdot y'_i$$



Methoden zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

- Ein ebenfalls weit verbreitetes Verfahren zur Zufallszahlenerzeugung stellt die lineare Kongruenz-Methode (Greenberger 1951) dar:

$$y_{i+1} = (A \cdot y_i + B) \bmod P$$
$$\textit{mit } y_0, A, B, P \textit{ ganzzahlig und } B \neq 0$$

- Satz: Obiger Generator hat dann und nur dann die Periode P, wenn
  1. B und P keinen gemeinsamen Teiler besitzen;
  2. A-1 ein Vielfaches von p ist für jede Primzahl p, die Teiler von P ist;
  3. A-1 ein Vielfaches von 4 ist, falls P ein Vielfaches von 4 ist.

Methoden zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen

Der Beweis dieses Satzes sowie weitere Verfahren zur algorithmischen Zufallszahlenerzeugung finden sich in

- D.E. Knuth: The Art of Computer Programming. Vol. 2, Addison-Wesley, 1969.

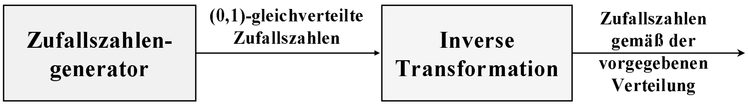
Zufallszahlen beliebiger Verteilungen

- Die in Simulationsmodellen nachzubildenden Zufallsvariablen sind nicht immer gleichverteilt, sondern können sehr verschiedenartigen theoretischen oder empirischen Verteilungsgesetzen unterliegen.
- Daher benötigt man auch Verfahren, die z.B. einer Exponential-, Normal- oder einer empirischen Verteilung genügen.
- Solche Verfahren gehen in der Regel von gleichverteilten Pseudo-Zufallszahlen des Intervalls (0,1) aus, die nach einer geeigneten Berechnungsvorschrift in Zufallszahlen der geforderten Verteilung transformiert werden.

Zufallszahlen beliebiger Verteilungen

- Satz: Im Intervall (0,1) gleichverteilte Zufallszahlen y_1, y_2, y_3, ... können in Zufallszahlen x_1, x_2, x_3, ... transformiert werden, die nach der Verteilungsfunktion F(x) verteilt sind, indem man die Umkehrfunktion von F auf y_i anwendet, also:

  $x_i = F^{-1}(y_i)$ (inverse Transformation)



Zufallszahlen beliebiger Verteilungen

Beweis

- Die Verteilungsfunktion der zu erzeugenden Zufallszahlen sei F.
- F möge streng monoton sein, d.h. es existiert F^{-1}.
- Die Zufallsvariable des Generators zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen aus dem Intervall (0,1) sei G.
- Dann besitzen die Zufallszahlen

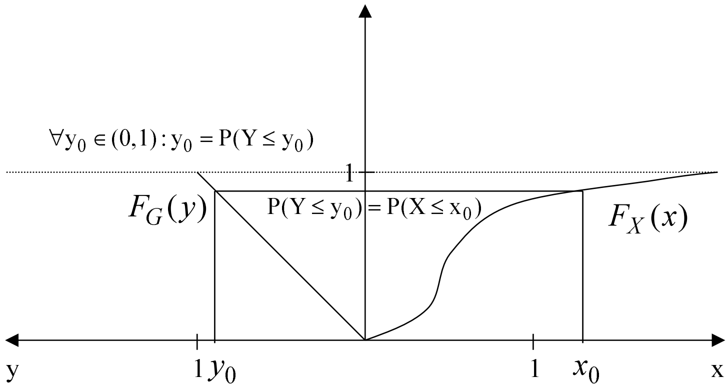
  $$X = F_X^{-1}(G)$$

  die gewünschte Verteilung F, denn es gilt:

  $$P(X < x) = P(F_X^{-1}(G) < x) = P(G < F_X(x)) = F_G(F_X(x))$$
  $$= F_X(x) \qquad \square$$

Zufallszahlen beliebiger Verteilungen

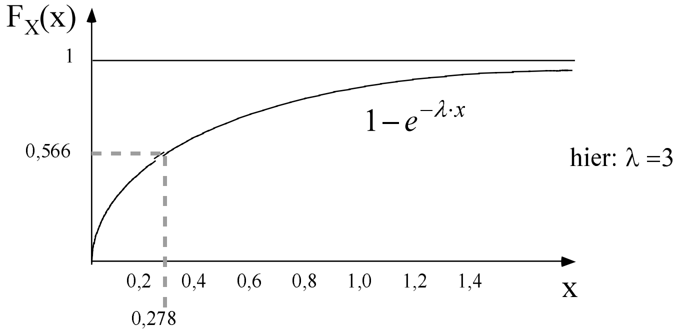
Geometrische Veranschaulichung des Beweises



Beispiel

Erzeugung exponentialverteilter Zufallszahlen

Verteilungsfunktion: $F_X(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}\, dt = \left[-e^{-\lambda \cdot t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda \cdot x} = y$



Exponentialverteilte Zufallszahlen

Die inverse Funktion ergibt sich durch Auflösung der Verteilungsfunktion nach x:

$$y = 1 - e^{-\lambda x} = \mathrm{F_X}(\mathrm{x})$$
$$e^{-\lambda x} = 1 - \mathrm{y}$$
$$\mathrm{x} = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y) = F_X^{-1}(y)$$

Exponentialverteilte Zufallszahlen x_i werden erzeugt, indem man zunächst eine gleichverteilte Zufallszahl y_i generiert und anschließend in die obige Umkehrfunktion einsetzt.

Normalverteilte Zufallszahlen

- Eine explizite Inversion der Verteilungsfunktion ist bei der Normalverteilung (wie auch bei einigen anderen theoretischen Verteilungen) aufgrund der Komplexität der Dichtefunktion mathematisch nicht möglich.
- Man wendet daher Näherungsverfahren an.
- Nach dem zentralen Grenzwertsatz der Statistik nähert sich die Summe von n identisch verteilten, unabhängigen Zufallsvariablen mit Mittelwert μ und endlicher Varianz σ^2 einer Normalverteilung mit Mittelwert $n \cdot \mu$ und Varianz $n \cdot \sigma^2$ asymptotisch an.

Normalverteilte Zufallszahlen

- Werden gleichverteilte Zufallszahlen addiert, dann ist schon für relativ kleine n eine sehr gute Annäherung an das Normalverteilungsgesetz zu beobachten.
- Günstig: n = 12, da der Mittelwert einer im Einheitsintervall (0,1) gleichverteilten Zufallsvariablen 1/2 und die Varianz 1/12 betragen.
- Die Varianz der Summe von 12 dieser Variablen ist dann gerade 1, ihr Mittelwert 6.
- Man erhält approximative standardnormalverteilte Zufallszahlen also wie folgt:

$$x_j = \sum_{i=1}^{12} y_i - 6 \qquad y_i \text{ aus } G(0,1); \text{Transformation in eine}$$

$$\text{beliebige Normalverteilung } N(\mu,\sigma^2):\ x_j' = x_j \cdot \sigma + \mu$$

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 21

Die Güte von Zufallszahlengeneratoren

- Folgende Kriterien werden als wesentlich angesehen:
  - Unabhängigkeit: Der Begriff Zufallszahl impliziert, daß die Folge der erzeugten Zahlen Unabhängigkeit aufweist, d.h. die Elemente jeder Teilfolge müssen paarweise unabhängig sein.
  - Besetzungsdichte: Pseudo-Zufallszahlengeneratoren können nur eine endliche Anzahl verschiedener Zahlen erzeugen. Es sollten jedoch hinreichend viele verschiedene Zahlen erzeugt werden, um das vorgegebene Intervall entsprechend „dicht" zu besetzen.
  - Effizienz: Ein Zufallszahlengenerator sollte sehr schnell und wenig speicherintensiv arbeiten.
  - Reproduzierbarkeit: Eine definierte Startsituation sollte stets zur gleichen Zufallszahlenfolge führen.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 22

Tests für Zufallszahlengeneratoren

- Unabhängigkeitstests überprüfen, ob eine Folge erzeugter Zufallszahlen auch tatsächlich das Kriterium der Zufälligkeit erfüllt
  - verteilungsfreier Runs-Test
  - Tests auf serielle Autokorrelation
- Anpassungstests dienen dazu, die Übereinstimmung zwischen der empirischen Verteilung aus einer Stichprobe und einer theoretischen Verteilung zu prüfen
  - χ^2 (Chiquadrat)-Anpassungstest
  - Test von Kolmogorov (bei kleinen Stichprobenumfängen)

Zusammenfassung zur Zufallszahlenerzeugung

- Zufallszahlenerzeugung ist Grundvoraussetzung für die stochastische Simulation.
- Algorithmische Zufallszahlengeneratoren sind effizienter als die Bereitstellung von Zufallszahlentabellen auf Basis von Beobachtungen.
- Die (multiplikative) lineare Kongruenz-Methode liefert gleichverteilte Zufallszahlen.
- Deren Güte kann anhand statistischer Testverfahren überprüft werden.
- Die inverse Transformation erlaubt die Erzeugung von Zufallszahlen, die beliebigen Verteilungsfunktionen (empirisch, theoretisch, stetig, diskret) genügen.

Teilprobleme bei der rechnergestützten Simulation

✓ Die Simulation von Zufall
  - Erzeugung von Zufallszahlen
  - Tests für Zufallszahlengeneratoren
- Planung und Auswertung von Simulationsexperimenten
  - Anfangszustand und Anlaufphase
  - Ergebnisgenauigkeit stochastischer Simulationen
- Modellüberprüfung
  - Verifikation
  - Validation

Stochastische Simulation

- Im Zusammenhang mit stochastischen Modellen versteht man unter einem Simulationsexperiment den simulierten Ablauf eines oder mehrerer stochastischer Prozesse unter Verwendung von Zufallszahlen.
- Stochastischer Prozeß: ein in der Zeit ablaufender zufallsabhängiger Vorgang.
- Diesem Vorgang wird zu jedem Zeitpunkt t eine Zufallsvariable X_t zugeordnet.
- Typisch für einen stochastischen Prozeß ist, daß die X_t voneinander nicht stochastisch unabhängig, sondern autokorreliert sind.

Stochastische Simulation

- Sei X_t ein zu simulierender stochastischer Prozeß (z.B. die Warteschlangenlänge zum Zeitpunkt t).
- Wird der Prozeß zum Zeitpunkt t_n "angehalten", können aus den bis dahin beobachteten Werten die zu untersuchenden Leistungsgrößen berechnet werden, z.B. die mittlere Warteschlangenlänge $\overline{X}_{t_n}$
- Wird der Simulationslauf mit einer anderen Initialisierung des Zufallszahlengenerators wiederholt, ergibt sich i.a. ein neuer Wert für die mittlere Warteschlangenlänge.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 27

Stochastische Simulation

➢ Ein einzelnes Simulationsexperiment sagt fast nichts aus!

- Lösungsansatz
  - ausreichende Anzahl unabhängiger Wiederholungen der Simulationsexperimente

  oder alternativ dazu

  - ein einziger, entsprechend längerer Simulationslauf
    - Vorteil: Die statistisch nicht verwertbare Anlaufphase der Simulation muß nur einmal durchlaufen werden
    - Nachteil: Nachweis der stochastischen Unabhängigkeit der betrachteten Einzelabschnitte (batches) des Gesamtlaufs

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 28

Anlaufphase

- Jeder Simulationslauf geht von einem Anfangszustand aus, der bei der Initialisierung des Modells hergestellt wird.
- Bei einer Simulationsstudie interessiert man sich meist für das eingeschwungene (stationäre) Verhalten eines Systems, das sich erst nach einer bestimmten Anlaufphase einstellt.
- Ein stochastische Prozeß wird als stationär bezeichnet, wenn die Wahrscheinlichkeit von X_t nicht von t abhängig ist.
- Viele stochastische Prozesse konvergieren nach einer gewissen Anlaufphase gegen einen stationären Prozeß.

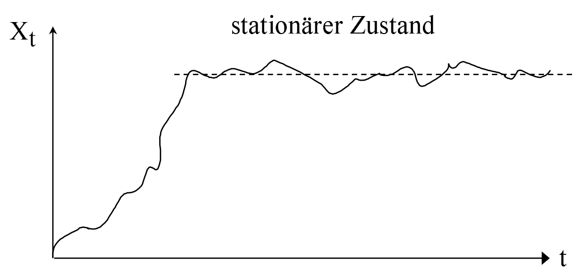
Anlaufphase

- Die Anlaufphase kommt dadurch zustande, daß die Anfangsbedingungen, die für das System gewählt wurden (wie beispielsweise das auftragsleere System, das erst gefüllt werden muß), keine charakteristischen Systemmerkmale sind.
- Es muß einige Zeit vergehen, bis die Auswirkungen dieser Startbedingungen unwesentlich werden und sich das Simulationsmodell stabilisiert, d.h. den stationären Zustand einnimmt.
- Beobachtungen, die während der Anlaufphase gespeichert wurden, dürfen für die statistische Auswertung eines Simulationslaufs nicht berücksichtigt werden.

➢ Es muß die Dauer der Anlaufphase bestimmt werden, worüber bislang allerdings keine allgemein gültige Theorie existiert.

Anlaufphase

graphische Darstellung der Anlaufphase



Ein nach der Anlaufphase stationärer Prozeß

Heuristische Verfahren zur Bestimmung der Anlaufphase

Regel von Conway

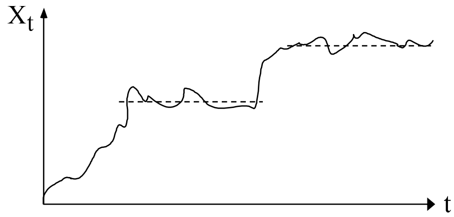
- Von einer längeren realisierten Folge x_1, x_2, ... eines stochastischen Prozesses X_t wird nacheinander für jedes x_i untersucht, ob es sich um Maximum oder Minimum der Restfolge handelt.
- Ist das der Fall, wird x_i zur Anlaufphase gerechnet und somit weggelassen.
- Die Untersuchung wird fortgesetzt, bis man zu einem x_i gelangt ist, das weder Maximum noch Minimum der Restfolge x_i, x_{i+1}, ... ist.
- Die Restfolge ist dann noch mit differenzierteren Verfahren auf Stabilität zu überprüfen.

Heuristische Verfahren zur Bestimmung der Anlaufphase

- Regel von Morse für einfache Bedienstationen

  $t_{Anlauf} > 3 \cdot$ Ankunftsrate / (Ankunftsrate - Bedienrate)^2
- Optische Prüfung des Werteverlaufs

  Effektiv, um offensichtlich transiente Prozesse (Prozeßphasen) zu erkennen



zeitweise transienter Prozeß

- Nachteil all dieser Verfahren: mangelnde Exaktheit

Statistische Verfahren zur Bestimmung der Anlaufphase

- Vorgehensweise: Prüfung auf Stationarität einer (Rest-) Folge von Stichprobenwerten
- Voraussetzung: Unabhängige Stichprobenwerte (in der Regel aber nicht gegeben)
- Auf der Unabhängigkeitsannahme basierende Methoden:

  Nicht-parametrische Testverfahren

  - Inversionstest
  - Run-Test

Ergebnisgenauigkeit von Simulationsexperimenten

„No completely satisfactory method for analyzing the output of steady-state simulations has yet been devised. Certainly, no consensus has been reached regarding the relative merits of existing methods.“

(Bratley/Fox/Schrage 1987)

Ergebnisgenauigkeit von Simulationsexperimenten

- Experimente mit stochastischen Simulationsmodellen stellen Zufallsexperimente dar.
- Eine fundierte Simulationsstudie verlangt daher eine ausreichende Anzahl unabhängiger Wiederholungen der Simulationsexperimente.
- Nur auf diese Weise kann man sich einen Überblick über die Variationsbreite der möglichen Ergebnisse verschaffen.
- Ergebnisangaben in Form von Stichprobenmittelwerten (Punktschätzungen) sind i.a. nicht ausreichend, da diese je nach zugrunde liegendem Modell und angesetzter Simulationsdauer erheblich vom tatsächlichen Erwartungswert abweichen können.

Ergebnisgenauigkeit von Simulationsexperimenten

- Da man bei Punktschätzungen keinerlei Anhaltspunkte dafür hat, um welchen Betrag der erhaltene Schätzwert vom tatsächlichen Parameter (Erwartungswert, Varianz, etc.) abweicht, ergänzt man in vielen Fällen eine Punktschätzung durch eine sogenannte Intervallschätzung.
- Im folgenden wird aufgezeigt, wie man für den Mittelwert $\underline{x}$ einer Stichprobe $x_1, x_2,...,x_n$ ein Vertrauensintervall bestimmt, das mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (z.B. 95%) angibt, in welchem Bereich sich der eigentliche Erwartungswert befindet.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 37

Konfidenzintervalle bei unabhängigen Stichprobenwerten

- Die Stichprobe $x_1,x_2, ...x_n$ sei das Resultat eines Simulationsexperiments, bei dem nacheinander n Realisationen der Zufallsgröße X erzeugt wurden.
- Bei nicht zu kleinem Stichprobenumfang (n > 40) ist ein Konfidenzintervall für E(X) gegeben durch

$$\left(\bar{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right), \text{mit } s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$ (Standardabweichung der Stichprobenwerte)

- Dabei ist z abhängig vom gewählten Konfidenzniveau α.
- Übliche Werte für z sind 1.64 (α=90%), 1.96 (α= 95%) und 2.58 (α= 99%).

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 38

Konfidenzintervalle bei unabhängigen Stichprobenwerten

- Um unabhängige Stichprobenwerte zu bekommen, sind unabhängige Simulationsläufe mit verschiedenen Zufallszahlen durchzuführen, bei denen alle Beobachtungen eines Laufes zu einem einzigen neuen Stichprobenwert x_i zusammengefaßt werden.
- In diesem Fall sind die x_i der einzelnen Läufe vollständig unkorreliert und die elementare statistische Theorie zur Intervallschätzung ist anwendbar.
- Problem: Die Anlaufphase wird bei jeder Simulation erneut durchlaufen.

Konfidenzintervalle bei quasi-unabhängigen Stichprobenwerten

- Lösung: Ein Simulationslauf (großer Länge) wird in eine Vielzahl quasi-unabhängiger Blöcke fester Länge (batches) aufgeteilt, deren Beobachtungen zu Stichprobenwerten (Batchmittelwerten) zusammengefaßt werden.
- Bei geschickter Wahl der Blocklänge sind die Stichprobenwerte nur sehr gering korreliert und Intervallschätzungen sind möglich.
- Problem: Festlegung einer angemessenen Blocklänge

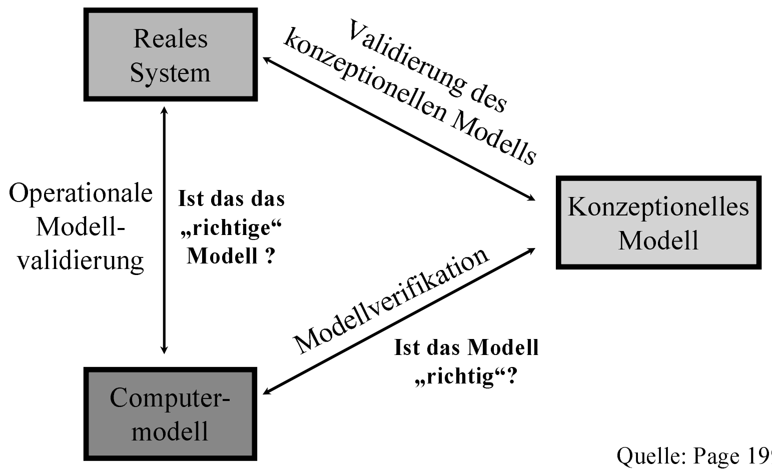
Teilprobleme bei der rechnergestützten Simulation

- ✓ Die Simulation von Zufall
  - Erzeugung von Zufallszahlen
  - Tests für Zufallszahlengeneratoren
- ✓ Planung und Auswertung von Simulationsexperimenten
  - Anfangszustand und Anlaufphase
  - Ergebnisgenauigkeit stochastischer Simulationen
- Modellüberprüfung
  - Verifikation
  - Validation

Modellüberprüfung

- Ob ein (Simulations-) Modell „richtig“ ist, läßt sich im allgemeinen nicht beweisen.
- Bestenfalls kann man das Modell einer Reihe von Prüfungen unterziehen, die das Vertrauen in dessen Gültigkeit im Rahmen einer bestimmten Problemstellung erhöhen.
- Die Problematik der Modellüberprüfung stellt sich grundsätzlich in allen Modellstudien, unabhängig vom jeweiligen Modelltyp.
- Bei Simulationsmodellen gestaltet sich die Modellüberprüfung jedoch als besonders komplex.

Ein mehrstufiger Ansatz zur Modellüberprüfung



Quelle: Page 1991

Validierung des konzeptionellen Modells

Überprüfung der Abbildung zwischen Realsystem und konzeptionellem Modell, wobei in drei Schritten vorgegangen wird:

- Überprüfung der Hypothesen und vereinfachenden Annahmen
- Datenverifikation
- Strukturprüfung

Modellverifikation

- Es wird geprüft, ob das mit Hilfe der einer bestimmten Implementationssprache erstellte (Simulations-) Programm das konzeptionelle Modell korrekt wiedergibt.
- Ein formaler Korrektheitsnachweis (SW-Verifikation) ist aufgrund der hohen Komplexität im allgemeinen nicht durchführbar.
- Daher werden meist Methoden des Software-Engineerings und des Software-Tests angewendet.

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 45

Operationale Validierung

- Hier geht es darum, die Verhaltensgültigkeit zu überprüfen, also die Ähnlichkeit der Prozeßabläufe in Realsystem und Modell.
- Dazu müssen zahlreiche Simulationsläufe durchgeführt werden, um das dynamische Modellverhalten ausreichend zu explorieren.
- Diese meist sehr aufwendige Modellüberprüfungsphase sollte folgende Aktivitäten umfassen:
  - Plausibilitätsprüfung
  - Sensitivitätsanalyse (Empfindlichkeitsanalyse)
  - Outputvergleich und Kalibrierung

Vorlesung „Simulationstechnik"
(Dr. M. Syrjakow) 46

Plausibilitätsprüfung

- Ziel: Untersuchung des plausiblen Verhaltens des Modells und seiner Komponenten
- Vorgehensweise:
  - Vergleich mit analytischen Alternativmodellen geringer Komplexität
  - Um die Gefahr der „selbsterfüllenden Prophezeiung“ zu vermeiden, sollte man neben den Modellentwicklern auch externe Experten (Kenner des realen Systems, Modellanwender) heranziehen und befragen.

Sensitivitätsanalyse

- Hier wird untersucht,
  - wie die Modellausgabe auf Veränderungen der Modelleingabe oder der Modellstruktur reagiert
  - von welchen exogenen Modellparametern die Modellergebnisse am stärksten abhängen
- Ziel: Erkennung von
  - Strukturfehlern
  - kritischen Modellgrößen
  - vernachlässigbaren Einflußgrößen

Outputvergleich

- Vergleich von Kennwerten des realen Systems mit entsprechenden Kennwerten, die durch Simulation gewonnen wurden.
- Mögliche Vorgehensweisen:
  - formal, exakt, quantitativ
    - Anwendung von statistischen Testverfahren
    - Bestimmung von Konfidenzintervallen
  - qualitative Ansätze
    - Turing-Test (subjektiver Blindversuch mit Experten, die vor die Aufgabe gestellt werden, Modelloutput von realen Systemdaten zu unterscheiden)

Kalibrierung

- **Kalibrierung:** Anpassung des Modells an das Realsystem durch Veränderung (Einregulierung) von Modellparametern, insbesondere solchen, die in der Realität nur ungenau oder überhaupt nicht gemessen werden können.
- Um sich nicht unnötig Manipulationsvorwürfen auszusetzen, sollte man
  - die Kalibrierung sehr vorsichtig (auf einige wenige Modellparameter) anwenden
  - die Kalibrierungsläufe stets sorgfältig dokumentieren

Zusammenfassung zur Modellüberprüfung

- Absolut notwendig, aber sehr schwierig und daher selten in ausreichendem Maße durchgeführt
- Vielzahl unterschiedlicher Methoden
- Einige abschließende Ratschläge
  - nach Möglichkeit unabhängige Experten zu Rate ziehen, die am Modellierungsprozeß nicht beteiligt waren
  - Modelltransparenz durch sorgfältige Dokumentation